المتتاليات العددية 01

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.
- إثبات خاصية بالتراجع.
- دراسة سلوك ونهاية متتالية.
- معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية.

أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي π .

في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي ليونارد فيبو ناتشي المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ مع $u_0 = 1$ و $u_1 = 1$ ، و التي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات .

المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى .

في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	1	1	2
3	2	1,25	1,75
4	3	1,36111111	1,69444444
5	4	1,42361111	1,67361111
6	5	1,46361111	1,66361111
7	6	1,49138889	1,65805556
8	7	1,51179705	1,6546542
9	8	1,52742205	1,65242205
10	9	1,53976773	1,65087884
11	10	1,54976773	1,64976773

نشاط أول

في القديم كان اليونان يتعاملون جيدا مع المربع التام لعدد طبيعي و وصلوا إلى النتيجة التالية:

كلما جمعنا أعدادا فردية متتابعة و بالتتابع نحصل على مربع تام لعدد طبيعي .

و هكذا : 1 مربع العدد 1 ، $1+3=4$ و 4 مربع العدد 2 ، $1+3+5=9$ و 9 مربع العدد 3 ، ...

	A	B
1	n العدد الفردي	مجموع الأعداد الفردية المتتابعة
2	1	
3	3	4
4	5	9
5	7	16
6	9	25
7	11	36
8	13	49
9	15	64
10	17	81
11	19	100
12	21	121
13	23	144
14		
15		

1) أنجز ورقة المجدول الموالية بإتباع الخطوات التالية:

في العمود A و ابتداء من الخلية $A2$ أحجز الأعداد الفردية من 1 إلى 99 .

في الخلية $B3$ أحجز $= A2+A3$

في الخلية $B4$ أحجز $= B3+A4$

2) أحسب $1+3+5+7+9+...+53+55$.

3) أحسب $1+3+5+7+9+...+85+87$.

4) خمن حساب $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n .

5) بفرض التخمين السابق صحيحا أثبت أن :

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

نقول أن الخاصية وراثية .

نشاط ثان

A. تقترح مؤسسة عمومية عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ $15000\ DA$ في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر بـ 15% نسمي u_1 المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـ u_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n \geq 1)$.

1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6 و u_7 .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) عين u_n بدلالة n .

4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب $25000\ DA$ ؟

B . تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي :مرتب شهري بـ $15000\ DA$ الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـ $1500\ DA$ بعد كل سنة نسمي v_1 المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرمز بـ v_n للمرتب الشهري خلال السنة n $(n \geq 1)$.

1) أحسب v_2 ، v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7.

2) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) عين v_n بدلالة n .

4) ابتداء من أي سنة يفوق المرتب $25000\ DA$ ؟

نشاط ثالث

A. نعتبر الدالة f المعرفة بِـ $f(x)=\sqrt{x+6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -6. فسر بيانيا النتيجة.
3. أحسب نهاية f عند $+\infty$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f.
5. أنجز جدول تغيرات الدالة f
6. عين تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
7. أرسم (Δ) و (C_f).

B. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=-5$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$

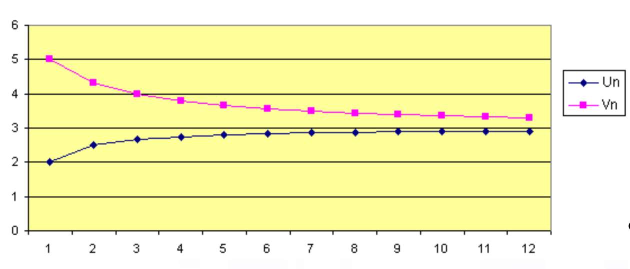
1. تحقق أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n>0$.
2. باستعمال حاسبة بيانية عين u_1، u_2، u_3 و u_4.
3. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود u_1، u_2، u_3 و u_4.
4. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
5. باستعمال الحاسبة البيانية خمن من أي عدد يقترب u_n أكثر فأكثر لما يصبح n كبيرا جدا.
6. إذا فرضنا أن تخمينك السابق صحيح أثبت صحة التخمين الذي وضعته في السؤال 4.

نشاط رابع

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n=\dfrac{3n+2}{n+1}$.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n=\dfrac{3n+10}{n+2}$.

1. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.
2. أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة.
3. عين نهاية المتتالية u_n - v_n.
4. الرسم المقابل يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين (u_n) و (v_n) باستعمال مجدول اكسال.
ماذا تلاحظ حول نهاية (u_n) وحول نهاية (v_n) ؟



↲ تذكير حول المتتاليات العددية .

1. تعريف .

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

2.اتّجاه تغيّر متتالية عددية.

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) .

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) .

متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n_0 $n\geq$ ، $u_{n+1}=u_n$.

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة(رتيبة تماما على الترتيب) .

3.المتتاليات الحسابية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+r$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

$u_n=u_0+nr$ و $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$

4.المتتاليات الهندسية.

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$.

الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

$u_n=u_0\times q^n$ و $S=u_0+u_1+...+u_n=u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ مع $q\neq 1$ و إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$.

نهاية متتالية هندسية.

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة .
- إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q\leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

تمرين محلول1: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-5n-1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

• أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n). استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل: · الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=-5n-1$. إذن: $v_n=-5n-1$

$v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}-v_n=-5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=-1$.

· من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=-1-5n$. $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}(5+5-5n)=\frac{n}{2}(-2-5n)$.

$v_0=u_1-u_0$ ، $v_1=u_2-u_1$ ، ... ، $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n=S+u_0$

و منه $u_n=\frac{n}{2}(-2-5n)+3$.

تمرين محلول2: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

• أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

• أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).

· ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

• أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S. استنتج نهاية (u_n).

الحل:

• $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

• $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• $-1<\frac{1}{3}<1$ و منه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$. $\lim_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$. $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$.

ـ الاستدلال بالتراجع.

1.مبدأ الاستدلال بالتراجع.

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n .

n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

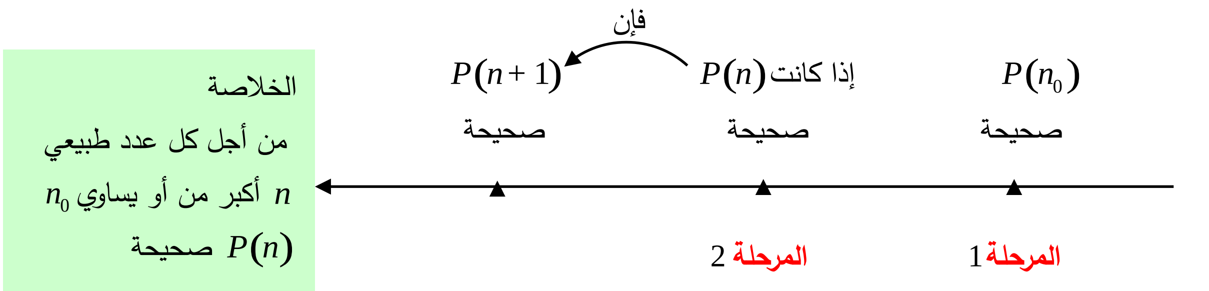
1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظات: · عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

· نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n+1$.

· التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري لأنه يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة،

مثلا : الخاصية " 3^n يقبل القسمة على 5 " خاصية خاطئة بالرغم من أنها وراثية .



2.متى يستعمل الاستدلال بالتراجع.

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية.

مثال: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 4^n+2 مضاعف للعدد 3 .

الحل: الخاصية " 4^n+2 مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $4^0+2=1+2=3$ و 3 مضاعف للعدد 3 .

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي. أي: 4^n+2 مضاعف للعدد 3.

و نضع $4^n+2=3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $4^n=3k-2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $4^{n+1}+2$ مضاعف للعدد 3 .

$$4^{n+1}+2=4^n\times 4+2=(3k-2)\times 4+2$$

$$4^{n+1}+2=12k-8+2=3(4k-2)$$

و $3(4k-2)$ مضاعف للعدد 3 و منه $4^{n+1}+2$ مضاعف للعدد 3 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، 4^n+2 مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول1: أثبت باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 :

$$3^n \geq 100n$$

	A	B	C	D
1	n	3^n	100n	
2	0	1	0	
3	1	3	100	
4	2	9	200	
5	3	27	300	
6	4	81	400	
7	5	243	500	
8	6	729	600	
9	7	2187	700	
10	8	6561	800	
11	9	19683	900	
12	10	59049	1000	
13				

الحل: نسمي $P(n)$ الخاصية " $3^n \geq 100n$ "

المرحلة 1: نتأكد من صحة $P(6)$

من أجل $n=6$ ، $3^6 = 729$ و $6 \times 100 = 600$

و منه $3^6 \geq 6 \times 100$ و بالتالي $P(6)$ صحيحة .

المرحلة 2 : نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي أكبر من أو يساوي 6 أي $3^n \geq 100n$ (فرضية التراجع) .

ونبرهن أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$ أي $3^{n+1} \geq 100(n+1)$.

لدينا $3^{n+1} = 3 \times 3^n$.

من فرضية التراجع $3^{n+1} \geq 3 \times 100n$ و منه $3^{n+1} \geq 2 \times 100n + 100n$.

من $n \geq 6$ نستنتج أن $2 \times 100n \geq 1200$ و بالأخص $2 \times 100n \geq 100$.

من $3^n \geq 100n$ (فرضية التراجع) و $2 \times 100n \geq 100$ ، نستنتج $3^{n+1} \geq 100n + 100$ و منه $3^{n+1} \geq 100(n+1)$.

أي أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$.

تمرين محلول2: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

الحل: الخاصية " $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع .

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3+4 = 7$ و 7 مضاعف للعدد 7 .

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي. أي: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

و نضع $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$.

ولنبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7 .

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+1+2} + 2^{n+2+1}$$
$$= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$$
$$= \left(7k - 2^{n+2}\right) \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2$$
$$= 7k \times 9 - 2^{n+2} \times 9 + 2^{n+2} \times 2$$
$$= 7k \times 9 + 2^{n+2} \times (-7)$$
$$= 7(k \times 9 - 2^{n+2})$$

و منه $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

ـ تقارب متتالية عددية.

نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$)

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على ℕ كما يلي : $u_n = \dfrac{-4n+1}{3n+2}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-4x+1}{3x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{4}{3}$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{4}{3}$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة: العكس غير صحيح :

مثال: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x\cos(2\pi x)}{x+1}$ ، الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) المعرفة على ℕ كما يلي : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

نلاحظ فعلا بأن $u_n = f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(2\pi n) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (نطبق النظريات علي النهايات) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ غير موجودة .

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha,+\infty[$ ($\alpha \in$ ℝ) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ ($\alpha \in$ ℝ) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ و α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

تمرين محلول1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{3n^2-5n+1}{n^2+5}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و منه $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+5}$ و المعرفة على ¡

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (u_n) لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

تمرين محلول2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$.

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n=f(v_n)$ حيث $v_n=\dfrac{4n+3}{n+1}$ و f الدالة العددية حيث $f(x)=\sqrt{x}$. المعرفة على $[0;+\infty[$.

الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) هي الدالة g حيث $g(x)=\dfrac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0;+\infty[$.

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية (v_n) لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=4$. و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{4}=2$.

تمرين محلول3: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$.

· أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

· أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية ثم استنتج نهاية (u_n).

الحل: · نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $u_0=3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي موجب تماما. أي: $u_n\neq 1$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\neq 1$ و نبرهن بالخلف . نفرض $u_{n+1}=1$

أي $\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}=1$ و نستنتج أن $u_n=1$ و هذا تناقض مع فرضية التراجع .إذن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

· $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$ و منه $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$ و بالتالي $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n-1}{3u_n-3}=\dfrac{1}{3}$.

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ لأن $r>0$

و نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

ـ متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مثال1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \dfrac{4n}{n+3}$

الجدول المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n) من أجل قيم n من 1إلى 14 و يعطي التمثيل البياني للمتتالية . انطلاقا من هذا نخمن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 1 هو عنصر حاد من الأسفل .

n	Un
1	1
2	1,6
3	2
4	2,28571429
5	2,5
6	2,66666667
7	2,8
8	2,90909091
9	3
10	3,07692308
11	3,14285714
12	3,2
13	3,25
14	3,29411765

لنبرهن على صحة هذا التخمين.

لنقارن بين $4n$ و $n+3$. $4n-(n+3)=3n-3=3(n-1)$ وبما $n \geq 1$ فإن $4n-(n+3) \geq 0$.

و منه $4n \geq (n+3)$ و بالتالي $\dfrac{4n}{n+3} \geq 1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n \geq 1$.

و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

مثال2: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \dfrac{2n+3}{n}$.

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 5 عنصر حاد من الأعلى .

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 2 عنصر حاد من الأسفل .

و منه المتتالية (u_n) متتالية محدودة .

مبرهنة: تقبل بدون برهان .

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

تمرين محلول1: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n^2+n+9}{n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل.

طريقة: لإثبات أن متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A)

يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0;+\infty[$.

الحل:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2+x+9}{x} .$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	↘	7	↗	

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n \geq 7$ ، و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين محلول2: (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

الحل:

نحسب الفرق $u_n - 2$.

$u_n - 2 = \dfrac{2n^2+1}{n^2+4} - 2$ و منه ، $u_n - 2 = \dfrac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4}$ أي $u_n - 2 = \dfrac{-7}{n^2+4}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{-7}{n^2+4} \leq 0$ و بالتالي:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 \leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و 2 عنصر حاد من الأعلى .

ـ متتاليتان متجاورتان.

تعريف: تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

الجدول المقابل يعطي قيم المتتاليتين (u_n) و (v_n) من أجل قيم n من 1 إلى 10 و يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين .انطلاقا من هذا نخمن أن المتتاليتين متجاورتان.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	1	1	2
3	2	1,25	1,75
4	3	1,36111111	1,69444444
5	4	1,42361111	1,67361111
6	5	1,46361111	1,66361111
7	6	1,49138889	1,65805556
8	7	1,51179705	1,6546542
9	8	1,52742205	1,65242205
10	9	1,53976773	1,65087884
11	10	1,54976773	1,64976773

لنبرهن على صحة هذا التخمين.

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right).$$

أي $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ أي $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ و منه:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

أي $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2}$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

$u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ و منه $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

إذن $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

مبرهنة: إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمرين محلول1: لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n. ما هي نهاية (w_n)؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل:

1) لدينا $w_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$

$w_{n+1} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \frac{u_n - v_n}{12}$ أي $w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n$.

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$. بما أن $-1 < \frac{1}{12} < 1$ و (w_n) متقاربة و $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.

2) $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4}$

أي $t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n$ و منه $t_{n+1} = t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

$\lim_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 44$.

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3}$ و منه : $u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n - v_n)}{3} = -\frac{2}{3} w_n$

إذن: $u_{n+1} - u_n = -\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n < 0$ والمتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}$ ومنه : $v_{n+1} - v_n = \frac{(u_n - v_n)}{4} = \frac{1}{4} w_n$

إذن: $v_{n+1} - v_n = \frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n > 0$ و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

نعلم أن $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$ و أن $w_n = u_n - v_n$ و بالتالي $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 . إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 44$ و منه $\lim_{n \to +\infty} 3u_n + 8v_n = 44$

نستنتج أن $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 4$.

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.دراسة مثال: نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

1) باستعمال مجدول ، نحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Un	0	3	1,5	2,25	1,875	2,0625	1,96875	2,015625	1,992188	2,0039063	1,9980469	2,000977	1,999512	2,000244

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها .

2) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

أرسم $(\mathcal{V})$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

ضع على محور التراتيب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 . هل تخميناتك تبدو صحيحة ؟

3) أحسب العدد α فاصلة نقطة تقاطع $(\mathcal{V})$ و (D).

نضع $v_n = u_n - \alpha$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

عين نهاية (v_n) ونهاية (u_n) .

2. الحالة العامة:

لتكن المتتالية التراجعية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة $u_{n+1} = a u_n + b$ حيث a و b عددان حقيقيان .

1) عين طبيعة المتتالية (u_n) من أجل $a = 0$.

2) أثبت أنه إذا كان $a = 1$ ، فإن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

3) نفرض $a \neq 1$ و $a \neq 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$ ، ليكن المستقيمان (D) و $(\mathcal{V})$ المعرفين بالمعادلتين $y = x$ و $y = ax + b$ على الترتيب .

- ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و $(\mathcal{V})$ ؟
- عين α فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (D) و $(\mathcal{V})$.
- لتكن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي $v_n = u_n - \alpha$ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

4) نضع $a = -1$ و نفرض أن u_0 غير معدوم .

أوجد الحدود السبعة الأولى بدلالة u_0 . ضع تخمينا ثم برهن صحة هذا التخمين .

◈ متتالية متقاربة نحو العدد e.

1. تعيين حصر للعدد e^x .

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $f(x)=e^x-(1+x)$.

أدرس تغيرات الدالة f .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x\leq e^x \ldots (1)$.

3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 $(x<1)$:

$$e^x\leq \frac{1}{1-x} \quad \ldots (2)$$

2. تعيين حصر للعدد e .

n عدد طبيعي غير معدوم .

1) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$.

2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية.

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0\leq e-u_n\leq\frac{3}{n}$.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .

3) باستعمال آلة حاسبة ، عين قيمة مقربة لكل من الأعداد : u_{100} ، u_{1000} ، u_{10000} .

تطبيق .

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$.

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}$.

1) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

2) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$. ماذا تستنتج؟

4) أثبت أن (u_n) و (v_n) تتقاربان نحو e .



حساب مساحة.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

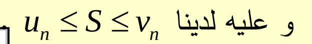
نريد حساب مساحة السطح المحدود بالمنحنى (C_f) ، محور الفواصل و المستقيمين (D) و (D') المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=2$.

على محور الفواصل نضع النقطة A التي فاصلته 1 و النقطة B التي فاصلتها 2 .

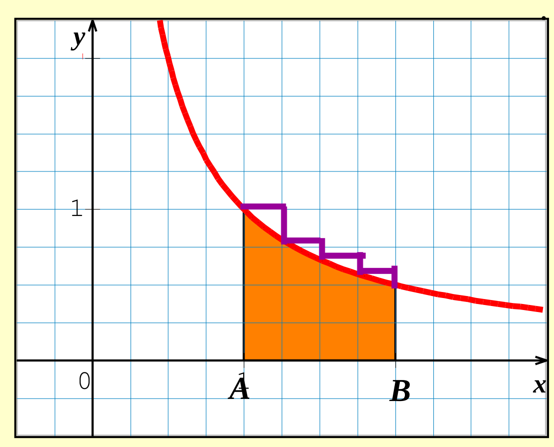
ليكن n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .نجزئ القطعة $[AB]$ إلى n جزء متقايسة .

ليكن E جزء المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمحورين .

نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في E ونسمي v_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي E .



و عليه لدينا $u_n \leq S \leq v_n$.



1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 لدينا:

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1} .$$

2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة .

4) أحسب $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$.

ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟

5) عيّن عددا طبيعيا p حتى تكون u_p قيمة مقربة لِ S إلى 10^{-2} .

6) عيّن عددا طبيعيا q حتى تكون u_q قيمة مقربة لِ S إلى 10^{-4} .

7) باستعمال آلة حاسبة ، عيّن: u_{50} ، u_{500} .

متتالية متقاربة نحو العدد: $\ln(2)$.

الجزء الأول .

(u_n) متتالية عددية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \ .$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

2) باستعمال مجدول ، أحسب الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

الجزء الثاني .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث أن :

$$f(x) = \ln(x) \ .$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1 \ .$$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي p لدينا:

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

3) n عدد طبيعي غير معدوم .

a) أكتب الحصر السابق من أجل قيم p الآتية : n ، $n+1$ ، ... ، $2n-1$.

b) بجمع طرفا إلى طرف المتباينات المحصل عليها ، أثبت أن :

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n} \ .$$

4) أثبت أن (u_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.

موضوع محلول

تمرين :

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة ℕ بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

2. (v_n) متتالية معرفة على ℕ بـ : $v_n = u_n + t\,n - 1$.

أ - بيّن أنّه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

ب - أثبت أنّه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

جـ - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث : $4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ مع λ عدد حقيقي.

عيّن λ حتى تكون النقطة G مرجّحا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب .

حل مختصر

1. نضع $p(n)$ الخاصية " $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ " . الخاصية الابتدائية $p(0)$ محققة لأنّه $u_0 = 2^{-0} - 2\times 0 + 1 = 2$. نفرض أنّ الخاصية $p(k)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي k أي $u_k = 2^{-k} - 2k + 1$. ولنبرهن صحة الخاصية $p(k+1)$ أي لنبرهن صحة المساواة $u_{k+1} = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1$. من المعطيات لدينا $u_k - 2u_{k+1} = 2k+3$ معناه $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k - k - \frac{3}{2}$ وباستعمال فرضية التراجع نجد $u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(2^{-k} - 2k + 1\right) - k - \frac{3}{2}$ ومعناه $u_{k+1} = 2^{-k-1} - 2k - 1$ ويكافئ $u_{k+1} = 2^{-k-1} - 2k - 2 + 1$ أي $u_{k+1} = 2^{-(k+1)} - 2(k+1) + 1$. إذن الخاصية الوراثية $p(k+1)$ صحيحة

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

2. أ - $v_n = u_n + t\,n - 1 = 2^{-n} + (t-2)n$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ وبما أن $t \neq 2$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} |t-2|\,n = +\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$. إذن (v_n) متباعدة .

ب - $v_{n+1} = 2^{-n-1} + (t-2)(n+1) = \frac{1}{2}2^{-n} + (t-2)n + (t-2)$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}(t-2)n + (t-2)$. من أجل كل $n \in$ ℕ، $v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n = 0$ معناه $\frac{1}{2}(t-2)n + (t-2) = 0$ ؛ وهذا يعني أن $t - 2 = 0$ أي $t = 2$.

إذن $t = 2$ يكافئ أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 1$.

جـ - $S_n = v_0 \frac{1 - 2^{-(n+1)}}{1 - 2^{-1}}$ أي $S_n = 2 - 2^{-n}$.

3) $S_0 = 2$، $S_1 = \frac{3}{2}$ و $S_2 = \frac{7}{4}$ ؛ $2 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \neq 0$ و $2\overrightarrow{GA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ معناه $4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \frac{7}{2}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ بما أنّ $4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ فإن $\lambda\overrightarrow{GC} = \frac{7}{2}\overrightarrow{GC}$ بما أنّه لا يمكن لـ G أن تنطبق على القط A، B و C فإنّ $\lambda = \frac{7}{2}$.

تعاليق

مبدأ التراجع يتضمّن شرطين صحة الخاصية الابتدائية وصحة الخاصية الوراثية . ويستعمل في البرهان الخاصيات المتعلقة بعدد طبيعي .

تكون المتتالية (v_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ مع l عدد حقيقي .

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q يحقق من اجل كل $n \in$ ℕ، $v_{n+1} = q v_n$.

يجب مراعاة عدد الحدود في المجموع .

بكل تحفّظ ، لاستعمال المرجّح يجب التحقق من أن مجموع المعاملات غير معدوم .

موضوع موجّه

تنبيه

الهدف من هذا التمرين هو تحديد نهاية مشتركة لمتتاليتين وتوظيف البرهان بالتراجع وخاصية تجاور متتاليتين .

تمرين.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1. أحسب الحدود v_0 ، u_1 ، v_1 ، u_2 ، v_2 ، u_3 و v_3 .
أعط القيمتين الظاهرتين على شاشة الحاسبة للحدين u_3 و v_3 .
2. برّر بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n > 0$ و $v_n > 0$.
3. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.
استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n - v_n \geq 0$.
4. أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة والمتتالية (v_n) متزايدة .
5. أ - برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_n \geq \frac{21}{8}$.
ب - برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.
استنتج باستعمال البرهان بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$.
6. استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان . ما هي نهايتهما المشتركة .
7. برر أن u_3 هو قيمة مقربة إلى 10^{-7} للعدد $\sqrt{7}$.
عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون u_n قيمة مقربة إلى 10^{-100} للعدد $\sqrt{7}$.

توجيهات

2. نبرهن على الخاصيتين معا و $u_{p+1} > 0$ تستنتج من $\frac{u_p + v_p}{2}$ و $v_{p+1} > 0$ من المعطيات
3. أكمل الحساب... $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}(u_{n+1}^2 - 7)$. الاستنتاج باستعمال السؤال 2.
4. احسب العبارتين $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ واستعمل السؤال السابق .
5. أ - لاحظ $u_n \geq v_n \geq v_1$. وبالنسبة ب - لاحظ $4u_{n+1} \geq 4 \times \frac{21}{8} \geq 10$ واستعمل 3.
واستعمل التراجع للبرهان على الخاصية $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$.
6. لتعيين $\lim_{n \to +\infty}(u_n - v_n)$ لديك $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2n-1}}$. ومن $v_n = \frac{7}{u_n}$ يكون $l^2 = 7$
7. يجب تبيان أنّ $\sqrt{7}$ هي قيمة مقربة إلى 10^{1-2^n} للعدد u_n .

تمارين تطبيقية

1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية .

1 في كل حالة من الحالات التالية ، عين بيانيا الحدود الأولى للمتتالية (u_n) , ثمّ أعط تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها .

أ - $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$.

ب - $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$.   جـ - $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

2 (u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n على الترتيب بـ : $v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2}$ و $w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$.

بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان مطلوب تعيين الأساس لكل منهما .

3 أحسب أقياس زوايا مثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتابعة لمتتالية حسابية .

4 (v_n) متتالية معرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

1) برر أن من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n > 0$.

2) (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \frac{1}{v_n}$. بين أن (u_n) متتالية حسابية .

5 (u_n) متتالية حسابية حيث $u_3 = 13$ و $u_7 = 37$ أحسب u_{17} .

6 (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

7 أحسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \ldots + 10$.

8 من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = \frac{5^n}{7^{n+1}}$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

9 (u_n) متتالية هندسية حيث $u_7 = \frac{1}{216}$ و $u_{10} = \frac{27}{1331}$ أحسب u_{30} .

10 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $v_n = u_{2n}$.

أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

11 (u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة تماما حيث: $u_0 = 2$ و $u_1 u_3 = 9$.

1) عين أساس المتتالية (u_n).

2) أحسب u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

2 ـ الاستدلال بالتراجع .

12 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

13 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

15 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

أ) $u_n > 1$.   ب) $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

16 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

17 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0,5$ و $u_{n+1}=(u_n)^2$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$ ،

2) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

18 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .

19 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n}-1$ مضاعف للعدد 8 .

20 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1}-2^{2n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

21 p_n هي الخاصية " n^3+2n يقبل القسمة على 3" .

هل الخاصية p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟

22 1) أثبت أنه إذا وجد عدد طبيعي n بحيث 9 يقسم 10^n+1 فإن 9 يقسم $10^{n+1}+1$.

2) هل من أجل كل عدد طبيعي n ، 10^n+1 مضاعف للعدد 9 ؟

3 ـ تقارب متتالية عددية .

23 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n>n_0$ فإن $-10^{-3}<u_n<10^{-3}$.

24 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n=n\sqrt{n}$.

جد عددا طبيعيا n_0 حيث إذا كان $n>n_0$، فإن $u_n>10^6$.

25 المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=3$. ابتداء من أي دليل يكون $u_n<10^{-5}$ ؟

26 المتتالية (u_n) هندسية أساسها 3 وحدها الأول $u_0=1$. ابتداء من أي دليل يكون $u_n>10^{12}$ ؟

في التمارين من 27 إلى 30 المطلوب حساب نهاية المتتالية (u_n) المقترحة .

27 1) $u_n=\dfrac{3n+2}{2n-1}$.　　2) $u_n=\dfrac{5n-2}{4n-3}$.

3) $u_n=2n-\dfrac{2}{n+1}$.　　4) $u_n=\dfrac{n}{3}-4+\dfrac{n+2}{n^2+1}$.

28 1) $u_n=\dfrac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}$.

2) $u_n=\dfrac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}$.

3) $u_n=\dfrac{-3n+12}{n^2+1}$.

4) $u_n=\dfrac{n^2+2n}{4n+3}$.

29 1) $u_n=\sqrt{\dfrac{3n+2}{2n+1}}$.　　2) $u_n=\sqrt{\dfrac{n^2+2}{n+3}}$.

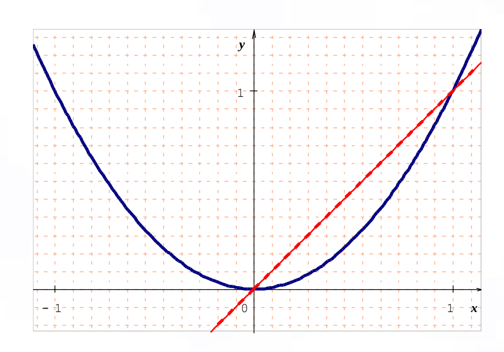
3) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}+2}{2n+1}$.　　4) $u_n=\dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$.

30 1) $u_n=\sin\left(\dfrac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)$.

2) $u_n=\cos\left(\dfrac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)$.

3) $u_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{17}$.

31 في الشكل لدينا $\mathscr{C}$ التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto x^2$ و Δ المستقيم ذو المعادلة $y=x$



(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_n = f(n)$ ، $v_{n+1} = f(v_n)$ و v_0 عدد حقيقي معلوم .

1) عين إحداثيي نقطتي تقاطع المنحني $\mathscr{C}$ والمستقيم Δ .

2) ما القول عن اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

هل هي متقاربة ؟

3) بتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (v_n), أعط تخمينا حول رتابتها ونهايتها في الحالات التالية :

$v_0 = 0{,}8$ ، $v_0 = -1{,}1$ و $v_0 = 1{,}1$

4) هل يمكن اختيار v_0 حتى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

4 ـ المتتاليات المحدودة .

32 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 5 - \dfrac{10}{n^2}$.

من بين الأعداد الحقيقية التالية : 0 ؛ 6 ؛ $4{,}99999$ ؛ 5 ، ما هي العناصر الحاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

في كل من التمارين من 33 إلى 36 ، أذكر إن كانت المتتالية (u_n) المقترحة تقبل عنصرا حادا من الأسفل، عنصرا حادا من الأعلى . هل هي محدودة ؟

33 أ - $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$. ب - $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$.

جـ - $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+2}$. د - $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$.

34 أ - $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. ب - $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$.

جـ - $u_n = \dfrac{-3}{\sqrt{3n+2}}$.

35 أ - $u_n = 2^n$. ب - $u_n = n\sqrt{3} - 2$.

جـ - $u_n = n^2 + n - 1$.

36 أ - $u_n = \dfrac{1}{n+1} + n^2$. ب - $u_n = n + \cos n$.

جـ - $u_n = (-1)^n \times n^2$.

37 1) أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x^2 - 5x + 6$.

2) أثبت أن العدد $\dfrac{1}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 بـ : $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$.

5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

38 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{-1}{2n+4}$ و $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

39 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ و $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة .

40 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه , هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين ؟

أ - (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$u_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ و $v_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

ب - (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \dfrac{5}{n}$.

41 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$ و $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

42 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$

و $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dots + \dfrac{1}{2n-1}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

43 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

44 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

و $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

تمارين للتّعمّق

1 - تذكير بالمتتاليات العددية .

45 برهن أن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{\ln n}{n}$ هي متناقصة ابتداء من الرتبة 3 .

46 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها .

47 أثبت أن المتتالية $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها .

48 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة .

49 بكالوريا

1) (v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل v_1 وأساسها r

أ . عين v_1 و r علما أن $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 24 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 74 \end{cases}$

ب . استنتج v_n بدلالة n وعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n > 6023$.

2) (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل u_1 وأساسها d .

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

عين u_1 و d حتى يكون $2S_n = n(3n+7)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0 = -4$.

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) أحسب المجموع $S = u_{26} + u_{27} + ... + u_{125}$.

51 لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 9$.

أ - أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

ب - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

جـ - جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د - أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$.

52 لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4u_n + 3$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_n + 1$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$.

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 علما أنّ $u_0 = \frac{2}{9}$

أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + ... + u_{10}$.

54 أحسب المجموع :

$S=0,02-0,1+0,5-2,5+...+312,5$

55 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد حقيقي n بـ :

$u_n=2\times3^n+3\times4^n$.

أحسب بدلالة n المجموع $u_0+u_1+...+u_n$.

56 لتكن المتتالية (u_n) ذات الحد الأول $u_1=1$ ، وحيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1،

$u_{n+1}=2u_n+3$.

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، نضع :

$v_n=u_n+3$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n=v_1+v_2+...+v_n$.

- أثبت أن $u_1+u_2+...+u_n+3n$ مضاعف للعدد 4 وهذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

57 (u_n) هي المتتالية المعرفة بـ $u_0=\frac{1}{6}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{5}{8}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2u_n+\frac{5}{3}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم v_0 ، v_1 و v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

- أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$t_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، $s_n=v_0+v_1+...+v_n$

58 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

من أجل كل $\begin{cases}u_0=2\ ,\ u_1=4\\u_{n+1}=4u_n-u_{n-1}:n\geq1\end{cases}$.

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases}a+b=4\\ab=1\end{cases}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n=u_{n+1}-au_n$.
برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها b .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n=u_{n+1}-bu_n$.
برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها a .

4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

59 a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كانت a , b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$.

2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

60 a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

أحسب a ، b و c علما أن $\begin{cases}a+b+c=36,75\\abc=343\end{cases}$.

61 a ، b و c ثلاث أعداد حقيقية مع $a\neq0$.

نفرض أن a ، b و c تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسة أساسها q ؛ و $3a$, $2b$, c تشكل ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية . أحسب q .

62 a عدد حقيقي معطى .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1=a$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n$.

1) (v_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n=13u_n-4$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q .

2) عبر عن v_n بدلالة a و n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة a و n .

3) أحسب بدلالة a و n المجموع :

$s_n=u_1+u_2+...+u_n$

63 يرمز (α_n) إلى متتالية هندسية غير منتهية ، كل حدودها موجبة حيث حدّها الأوّل : $\alpha_1 = 3$ ، و $\alpha_3 + \alpha_5 = \frac{15}{16}$.

1) عين أساس المتتالية (α_n) .

2) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , نضع $\beta_n = \ln(\alpha_n)$ ($\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري) .

أ . برهن أنّ (β_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب . أحسب بدلالة n المجموع t_n حيث :

$t_n = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$

64 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$A_n = \underbrace{11...1}_{n \text{ رقم}}$$

(عدد من n رقم مساويا لِـ 1 مثلا $A_4 = 1111$) .

أحسب $s_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

65 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع :

$$A_n = \underbrace{33...3}_{n \text{ رقم}}$$

(عدد من nرقم مساويا لِـ 3 مثلا $A_5 = 33333$) .

أحسب $s_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$

66 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على ℕ بِـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5u_n - 7n$ ؛ $v_n = u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16}$.

1) باستعمال مجدول إكسل نريد حساب الحدود العشر الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ولهذا ، أحجز في الخلية $B1$ العدد 0 ثم باستعمال الفأرة واللمسة *ctrl* نسحب إلى اليمين ؛ نحجز في الخلية $B2$ العدد 5 .

في الخليتين $C2$ و $B3$ وباستعمال اللمسة = نحجز العبارتين الموضوعتين في الشكل ثم أسحب كل منهما إلى اليمين باستعمال الفأرة واللمسة *ctrl* .

	A	B	C	D
1	n	0	1	2
2	u_n	5	5*B2-7*B1	
3	v_n	B2-7/4*B1-7/16		
4				

Feuil1

بملاحظتك للسطر الثالث ، أعط تخمينا لطبيعة المتتالية (v_n) .

2) برهن التخمين الموضوع في السؤال السابق ثم عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

3) أحسب $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

67 (u_n) هي المتتالية المعرفة بِـ $u_0 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ ، α و β عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) جد علاقة تربط بين العددين α و β التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي n بِـ $v_n = u_n + \gamma$ حيث γ عدد حقيقي غير معدوم .

أ . عين γ بدلالة α و β حيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

ب . نضع $\alpha = 3$, $\beta = 2$ و $\gamma = 1$.

أحسب المجموعين s_n و t_n حيث

$s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

2 - الاستدلال بالتراجع .

68 بكالوريا

نضع $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أ - أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 .

ب - عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $s_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

69 نضع $t_n=1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أحسب t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 . عبر عن t_{n+1} بدلالة t_n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

70 من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، نضع :

$$s_n=1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+...+(n-1)2^{n-2}$$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq2$ ،

$$s_n=(n-1)2^n-n\times2^{n-1}+1=1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n$$

71 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1\times2\times3+2\times3\times4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

❖ الرمز $n!$ يقرأ عاملي n ومعرف بـ :

$$n!=1\times2\times3\times...\times n$$

72 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1+2\times2!+3\times3!+...+n(n!)=(n+1)!-1 .$$

73 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $n!\geq2^{n-1}$.

74 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 لدينا : $2^n\geq n^2$.

75 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 , $5^n\geq4^n+3^n$.

76 متباينة برنولي (*Bernoulli*) a عدد حقيقي موجب تماما .

1) برهن أنه أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $(1+a)^n\geq1+na$.

2) استنتج أنه إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.

(تبرير المبرهنة المقبولة في السنة الثانية)

77 1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $3n^2\geq(n+1)^2$.

2) نسمي P_n الخاصية : " $3^n\geq2^n+5n^2$ " .

أ . ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة ؟

ب . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 5 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

78 من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي P_n الخاصية : " $3^n\geq(n+2)^2$ " .

1) من بين الخواص P_0 ، P_1 ، P_2 و P_3 عين منها الصحيحة .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

79 (u_n) متتالية معرفة على ℕ بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^{\,2}+1}}$.

1) أحسب الحدود u_1 , u_2 , u_3 ؛ أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

80 الهدف التعبير عن u_n بدلالة n .

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=7$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=10u_n-18$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 .

لاحظ النتائج هي أعداد تتكون من أرقام وسطها أسفار ؛ أعط العلاقة بين عدد الأسفار و n .

2) أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n , ثم برهن بالتراجع هذا التخمين .

81 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 . أعط تخمينا لعبارة $(3-u_n)$ بدلالة n.

2) برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقا , ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

82 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4 - u_n$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5. أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{2n} = 3$ و $u_{2n+1} = 1$.

83 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع ، $s_n = 1+3+5+...+(2n-1)$.

1) أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 . أعط تخمينا لعبارة s_n بدلالة n.

2) برهن هذا التخمين بالتراجع .

3) لاحظ المجموع s_n وأعط برهانا آخرا للتخمين .

84 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = n + u_n$.

1) أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n.

85 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.

1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) وأعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) استعمل البرهان بالتراجع لتعيين عبارة u_n بدلالة n.

86 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$.

(v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n + u_n$.

1) عبر عن u_n بدلالة n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 + n^2$.

87 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > n^2$.

88 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 \in]0;1[$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 1$.

89 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n \le 2$.

أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

90 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

1) تحقق من أن الحدود u_1 ، u_2 و u_3 تنتمي إلى المجال $[0;4[$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n < 4$.

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

91 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0,6\, u_n - 1,2$.

1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -3$.

92 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n+3}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$.

2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

93 θ عدد حقيقي من المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=2\cos\theta$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1) أ - أحسب u_1 و u_2 .

ب - أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$.

94 (u_n) متتالية معرفة بـ :

$u_0=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$.

1) باستعمال الآلة الحاسبة أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم برهن هذا التخمين باستعمال البرهان بالتراجع .

95 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع :

$u_n=n\times 2^{n-1}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_1+u_2+...+u_n=1+(n-1)2^n$.

96 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم لدينا :

$u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

2) استنتج قيمة المجموع

$\dfrac{1}{1427\times1428}+\dfrac{1}{1428\times1429}+...+\dfrac{1}{2007\times2008}$.

97 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عددان طبيعيان p_n و q_n حيث $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p_n+q_n\sqrt{3}$.

98 1) المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1=1$ ، $u_2=3$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

أ . أحسب الحدود u_3 ، u_4 و u_5 . أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

ب . برهن بالتراجع هذا التخمين .

2) المتتالية (v_n) معرفة بـ $v_0=\dfrac{2}{5}$ ، $v_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{2^n+3^n}{5}$.

99 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ، $u_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$.

100 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

برهن أن :

أ - من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>-1$.

ب - المتتالية (u_n) رتيبة .

جـ - من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

101 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n+4}{u_n-2}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-4}$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

102 p الدالة كثيرات الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$p(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،
$p(x+1)-p(x)=x^2$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
$p(n)\in\mathbb{N}$.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
$p(n+1)=1^2+2^2+...+n^2$

103 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_1=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\frac{-1}{u_n-2}$.

أعط القيمة المضبوطة للحد u_{2006} .

104 برهن بالتراجع أنه كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 24 يمكن كتابته $n=5a+7b$ مع a و b عددين طبيعيين .

105 1) (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

أ . أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) .

ب . برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=\frac{n}{2^n}$.

2) k عدد طبيعي غير معدوم، (v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_1=\frac{1}{k}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_{n+1}=\left(\frac{n+1}{kn}\right)v_n$.

أعط تخمينا لعبارة v_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع هذا التخمين .

3 - تقارب متتالية عددية .

في التمارين 106 إلى 108 المطلوب حساب نهاية المتتالية (u_n) المقترحة .

106 1) $u_n=e^{1-n}$. 2) $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)$.

3) $u_n=(n+2)e^{-n}$. 4) $u_n=\ln\left(3+e^{2-n}\right)$.

5) $u_n=\frac{e^n-6}{2e^n+1}$. 6) $u_n=\frac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}$.

7) $u_n=\ln\left(\frac{e^n-3}{e^n+1}\right)$. 8) $u_n=\ln\left(\frac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)$.

107 1) $u_n=n^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}-\sqrt{3}\right)$.

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3}n$.

3) $u_n=\frac{n}{\sqrt{n+2}}-\frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

4) $u_n=\frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$.

108 أ - $u_n=\frac{2^n}{5^n}$. ب - $u_n=\frac{3,01^n}{3^n}$

.

جـ - $u_n=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}$.

109 (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بِـ : $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{3u_n+1}$

و $v_n=\frac{1}{u_n}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$.

2) برهن أن (v_n) متتالية حسابية .

3) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

110 (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بِـ : $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2$

و $v_n=u_n+3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية .

2) عين نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (s_n) و (t_n) .

111 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n) ، (v_n) ، (w_n) و (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $v_n = \frac{u_n}{n}$ ؛ $w_n = u_n - n$ ؛ $t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$.

112 جد نهاية لكل من المتتاليات (u_n)، (v_n) و (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :
$u_n = \frac{3n^2-4}{n+1}$ ؛ $v_n = \frac{u_n}{n}$ ؛ $w_n = u_n - 3n$.

113 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{n!}$.
(نذكر من أجل $n \geq 1$ ، $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$)

1) أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية (u_n) .

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ ؛ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

114 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$.
تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

115 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = n + 1 - \cos\frac{n\pi}{5}$.
تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $n \leq u_n \leq n+2$ ؛ ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

116 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$.

1) أعط القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من المتتالية (u_n).

2) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 ، يكون $u_n \geq 2^n$ ؛ ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

117 1) أكتب برنامجا للمتتالية u المعرفة بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

2) ابتداء من أي دليل تصبح حدود المتتالية مستقرة على شاشة الحاسبة .
ما هو التخمين الذي يمكن وضعه ؟

3) أثبت أنه إذا كانت المتتالية u متقاربة فإن نهايتها هي العدد الذهبي $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

118 عين نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بِـ $u_1 = 0,57$ ، $u_2 = 0,5757$ ، ... ، $u_n = 0,\underbrace{57...57}_{2n \text{ رقما}}$.

119 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

1) باستعمال مجدول أو حاسبة بيانية , أعط القيمة العشرية المقربة للحدود u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ، ثم للحدود u_{10^n} حيث العدد n يتغير من 1 إلى 13 .

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$.
استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3) اشرح لماذا يظهر تناقض في النتيجتين للسؤالين السابقين .

120 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

1) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

3) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة ، فما هي نهايتها ؟

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 7$

أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

121 1) برهن أنه ابتداء من رتبة مطلوب تعيينها ، يكون $2^n \le (n-1)!$.

2) بين أن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = a$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+{u_n}^2}$.

1) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_{n+1}| \le \frac{|u_n|}{2}$.

2) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$.

3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

123 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1) أ - برر أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، u_n موجب تماما .

ب - إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فما هي نهايتها ؟

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، أنشئ المنحني $\mathscr{C}$ الممثل للدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$ ، ثم المستقيم Δ ذي المعادلة $y = x$ (يقتصر الرسم على المجال $[0 ; 2,2]$) . مثل الحدود u_1، u_2 و u_3 .

ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ . برهن أن المتتالية (v_n) هندسية متقاربة ثم عبر عن v_n بدلالة n .

ب . عبر عن u_n بدلالة v_n ثم برر التخمين الموضوع سابقا .

124 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \le u_{n+1} \le u_n$.

2) برر أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l أكبر من أو تساوي 2 .

3) بين أن l تحقق $l = \sqrt{2+l}$. استنتج قيمة l .

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \ln(x+1) - x$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$.

2) استنتج أن : من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ،

$$\ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k}$$

ثم من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1) \le u_n$.

ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3) أكتب برنامجا الذي يحدّد أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n \ge 10$.

4 - المتتاليات المحدودة .

126 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n = \frac{1}{n}$.

1) أثبت أن 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n < v_n$.

3) هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) محدودتين ؟

127 المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$u_n = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

1) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

2) أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

3) هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

128 المتتالية (u_n) معرفة بـ :

$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$.

1) هل العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، استنتج أنها متقاربة .

3) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

129 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = e^{-u_n}$.

برهن أنه ابتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 1 وهذا مهما كان اختيارا الحد الأول u_0 .

130 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$.

1) ما هو اتجاه التغير للمتتالية (u_n)؟

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة . هل العدد 1,333333 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)؟

131 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ u_0 عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} = u_n{}^2 - 3u_n + 5$.

1) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ، ماذا تستنتج ؟

2) نفترض أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l . أكتب معادلة من الدرجة الثانية تكون محقق من أجل l .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة . هل هي محدودة ؟ ما القول عن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ؟

132 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ - عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

ب - باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا , أكتب v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

ج - هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + ... + \frac{u_n}{4^n}$.

برهن أن المتتالية (w_n) متقاربة .

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1) برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) استنتج عددا طبيعيا p حيث u_p تكون قيمة مقربة إلى 10^{-3} بالنقصان للنهاية l المشتركة بين المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

أعط قيمة u_p على شكل كسر غير قابل للاختزال وكذلك قيمته المقربة المحصل عليها بالحاسبة .

134 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n \leq 1 \leq v_n$.

2) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان وجد نهايتهما المشتركة .

135 نعرف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بـ: $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n, نضع $w_n=u_n-v_n$.

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية . عين نهايتها ثم عبر عن w_n بدلالة n .

2) عبر عن $u_{n+1}-u_n$ و $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n ؛ استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ولهما نفس النهاية يرمز لها l .

4) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $t_n=3u_n+10v_n$.

برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة . استنتج قيمة l .

136 نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ: $u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

1) أحسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $w_n=v_n-u_n$.

بين أن المتتالية (w_n) هندسية وعين نهايتها .

3) أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج أنهما مجاورتان .

4) برهن أن (t_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بِـ : $t_n=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)$.

برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .

عين l , النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

137 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ :

$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f . استنتج أنه إذا كان $x\in[1;2]$ ، فإن $f(x)\in[1;2]$.

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$.

باستعمال حاسبة بيانية مثل منحنى الدالة والمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية :

من أجل كل عدد طبيعي n : " $1\le u_n\le 2$ " ؛ " $1\le v_n\le 2$" ؛ " $u_n\le u_{n+1}$" و " $v_n\ge v_{n+1}$ " .

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ,

$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

عين القيمة المضبوطة للعدد l .

138 a و b عددان حقيقيان حيث $0<a<b$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0=a$ ، $v_0=b$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ ،

$v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

(u_{n+1} يسمى الوسط الهندسي للحدين u_n و v_n ؛ v_{n+1} يسمى وسطهما الحسابي .)

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n\le v_n$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.

استنتج أن $v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(b-a)$.

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) نفرض أن $a=2$ و $b=5$ ، والعدد l هو النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

استعمل نتيجة السؤال الثاني لتعيين القيمة المقربة إلى 10^{-3} للنهاية l .

139 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0=-1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

1) أ . برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<v_n$.

ب . برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين.

جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتين ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n .

3) جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

مسائل

140 لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على ℕ والتي تحقق الخاصية التالية :

$$u_{n+2}=\frac{3}{35}u_{n+1}+\frac{2}{35}u_n \text{ .}$$

1) هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

2) تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين α و β تكون المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n=\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ هي عنصر من المجموعة (E) .

3) عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n=\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n+\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n$ علما أن $u_0=3$ و $u_1=-\frac{4}{35}$. أحسب نهاية هذه المتتالية .

141 $I-$ 1) أدرس اتجاه تغير الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x) \text{ ؛}$$

$$g(x)=\ln(1+x)-x \text{ .}$$

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛

$$x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x \quad . . . (1)$$

$II-$ في هذا الجزء نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) نضع : $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$ و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}$.

باستعمال العلاقة (1) برهن أن :

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln u_n\le S_n \text{ .}$$

4) أ - أحسب S_n و T_n بدلالة n .

ب - استنتج نهاية لكل من المتتاليتين (S_n) و (T_n) .

5) دراسة تقارب المتتالية (u_n) .

أ - برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب - استنتج أنها متقاربة .

جـ - نقبل النتيجة التالية: إذا كانت المتتاليتان (α_n) و (β_n) متقاربتين حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha_n \le \beta_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.

أعط حصرا لنهاية المتتالية (u_n) .

142 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بِـ :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \dots + \sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متقاربة ونهايتها هي $\frac{1}{2}$.

2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بِـ : $f: x \mapsto x - \sin x$ ؛

$g: x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$ ؛

$h: x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$.

أدرس اتجاه تغير لكل من الدوال f ، g و h مبينا أن كل من هذه الدوال موجبة .

3) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \le n^4$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \le u_n \le v_n$.

4) أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة ، وما هي نهايتها ؟

143 I – لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ : $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ : $g(x) = 1 + x + \ln x$ ؛ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0,27 \le \beta \le 0,28$.

2) من أجل $x > 0$ عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$.

. استنتج تغيرات الدالة f .

. أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.

II – نريد دراسة المعادلة $f(x) = n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) بين أنه من أجل كل n هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا α_n .

2) المقارنة بين α_n و e^n .

أ . بين أن $f(e^n) \le n$, استنتج أن $\alpha_n \ge e^n$.

ب . أثبت أن العلاقة $f(\alpha_n) = n$ يمكن كتابتها على الشكل $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \dots (1)$.

استعمل (أ .) لاستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{e^n}$.

3) المقارنة بين α_n و $e^n + n$.

نضع $\alpha_n = e^n(1+\varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_n \ge 0$ $\dots$ (2) .

أ - باستعمال العلاقة (1) عبر عن $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)$ بدلالة n .

ب - بين أنه من أجل كل $t \ge 0$ ،

$$0 \le (1+t)\ln(1+t) - t \le \frac{t^2}{2} .$$

جـ - استنتج من (أ .) و (ب .) أنه من أجل كل $n \ge 1$ ، $0 \le ne^{-n} - \varepsilon_n \le \frac{n^2}{2}e^{-2n} \dots (3)$.

د - باستعمال (2) و (3) عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^n + n - \alpha_n)$.

اختيار من متعدد

144 في كل سؤال اقتراحات موضوعة يمكن أن تكون أكثر من جملة صحيحة؛ المطلوب اختيار الجمل الصحيحة.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0$ و من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

نعرّف المتتاليتين (v_n) و (w_n) بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

1) أ - المتتالية (v_n) حسابية. ب - المتتالية (w_n) حسابية.
جـ - المتتالية (v_n) هندسية. د - المتتالية (w_n) هندسية.

2) أ - $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. ب - $v_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
جـ - $w_n=1$.

3) أ - $u_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.
ب - $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$.
جـ - المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية .
د - المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 في كل من السؤالين ، بالضبط اقتراحين صحيحين المطلوب تعيّينهما .

1) المتتاليات التالية متقاربة :
أ - $\frac{2^n}{n^{2008}}$ و $n>0$. ب - $\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$.
جـ - $n\sin\frac{1}{n}$ و $n>0$. د - $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ و $n>1$.

2) المتتاليات u ، v و w تمتاز بالخواص التالية :
$u_n\le v_n\le w_n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=1$.
أ - $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.
ب - المتتالية v محدودة من الأسفل .
جـ - من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1<v_n<1$.
د - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحيح أم خطأ ؟

146 ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة .

1) كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى .
2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة .
3) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي محدودة .
4) إذا كانت نهاية متتالية هي $+\infty$ فإن هذه المتتالية تكون غير محدودة من الأعلى .
5) كل متتالية متقاربة هي محدودة .
6) إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و تحقّقان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<v_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n<\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

147 أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرّرا ذلك

1) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإنّ المتتالية (u_n+v_n) لا تقبل نهاية حقيقية .
2) إذا كان العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) وإذا كانت المتتالية (v_n) لا تقبل نهاية حقيقية ، فإنّ المتتالية $(u_n\times v_n)$ لا تقبل نهاية حقيقية .
3) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.
4) كل المتتالية تكون محدودة من الأسفل أو من الأعلى .

148 بكالوريا

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1,5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-1$.

المطلوب تمييز بن الجمل الصحيحة والخاطئة مبرّرا ذلك.

1) المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y=x$ و $y=2x-1$.
2) المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-1$ ، هي متتالية هندسية .
3) المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى .